НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО - НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

Кафедра физики

Кандауров И.В., Мешков О.И., Пиндюрин В.Ф.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ НА ЭВМ

Методическое пособие

Часть II

Кинематика материальной точки

Новосибирск

2000

Пособие является составной частью методических материалов, предназначенных для учащихся Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (бывшая Физико-математическая школа при НГУ), занимающихся на спецкурсе "Моделирование физических явлений на ЭВМ". В настоящем пособии рассмотрены численные методы решения задач кинематики материальной точки. Дается набор задач для самостоятельного решения.

Рецензенты:

доцент кафедры физики
СУНЦ НГУ
Харитонов В.Г.

профессор кафедры теор.
физики НГУ, к.ф.- м.н.
Коткин Г.Л.

Подготовлено при поддержке ФЦП «Интеграция», проект «Современные компьютерные технологии в ранней профессиональной ориентации и подготовке физиков-исследователей» (рег. № 274)

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие посвящено моделированию на компьютере задач, относящихся к разделу механики, называемому кинематикой. В отличие от статики и динамики, зародившихся еще в античные времена в связи со строительством различных сооружений (статика) и в связи с полетом снарядов (динамика), кинематика выделилась в самостоятельный раздел физики довольно поздно, в начале XIX века. Причиной послужило бурное развитие машиностроения, широкое применение многих механизмов, среди которых кривошипно-ползунный механизм, различные конструкции регуляторов и т.п.

Французский физик Ампер (1775-1836), сделавший важный вклад в открытие законов электродинамики, впервые предложил в 1834 г. выделить раздел механики, изучающий закон движения точки и твердого тела безотносительно к причинам, его вызывающим, в отдельный раздел теоретической механики, назвав его кинематикой. Основы кинематики твердого тела были развиты Леонардом Эйлером. Ускорение точки, совершающей сложное движение, было корректно исследовано французским ученым Густавом Гаспаром Кориолисом (1792-1834). Классическую теорему о сложении ускорений он доказал в 1837 году. Кинематика механизмов получила теоретическую базу в работах русского математика П.Л. Чебышева (1821-1894).

В этом пособии рассматриваются задачи, связанные, в основном, с построением траектории точки, совершающей движение по известному закону в различных системах координат.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Кинематика есть раздел механики, посвященный изучению движения тел с геометрической точки зрения, без учета причин, вызывающих изменение этого движения, т. е. сил. От геометрии кинематика отличается, по существу, тем, что при рассмотрении перемещений тел (или соответствующих геометрических образов) в пространстве принимается во внимание и время перемещения. Поэтому кинематику называют еще “геометрией четырех измерений”, понимая под четвертым измерением время.

Движение материальных объектов, в частности материальной точки, совершается в пространстве при изменении времени. Пространство в классической механике считается евклидовым, не зависящим от времени и движущихся в нем материальных объектов. Время принимается универсальным, не связанным с пространством и не зависящим ни от движения наблюдателя, с точки зрения которого рассматривается движение материального объекта, ни от самого объекта.

Система отсчета. Положение тела в пространстве может быть определено только относительно произвольно выбранного другого неизменяемого тела, называемого телом или системой отсчета. Для определения положения рассматриваемого объекта с телом отсчета неподвижно связывают какую-нибудь (декартову или иную) систему координат. Если положение тела относительно выбранной системы отсчета со временем не меняется, то это тело покоится относительно заданной системы отсчета, но может двигаться относительно какой-то другой. При этом одно и то же движение тела может носить совершенно различный характер в разных системах отсчета.

Траектория. Непрерывная кривая, описываемая точкой при ее движении, называется траекторией (от латинского trajcio ”перебрасываю”, этот термин первоначально обозначал полет артиллерийского снаряда.). Форма траектории зависит от выбранной системы отсчета. Например, если с летящего с постоянной скоростью горизонтально Земле самолета сбросить груз, то, пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая только силу тяжести, получим в качестве траектории движения центра масс груза относительно самолета прямую линию, а относительно Земли - параболу.

Задачи кинематики. Движение тела по отношению к выбранной системе отсчета будет известно, если можно определить его положение относительно этой системы отсчета в любой произвольный момент времени. Положение точки относительно данной системы отсчета определяется соответствующими параметрами (координатами), а движение (или закон движения) — уравнениями, выражающими эти параметры как функции времени. Т. е. для декартовой системы координат движение точки задается в виде:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t) \qquad (1)$$

Уравнения (1) представляют собой, с одной стороны, закон движения точки, так как позволяют для каждого момента времени t определить x, y, и z, с другой стороны эти уравнения являются уравнениями траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t. Существуют и другие способы задания движения точки. При векторном способе задания закона движения радиус-вектор $\mathbf{r}$ движущейся точки M (Рис.1) дается как функция времени $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Связь между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и декартовыми координатами точки выражается равенством

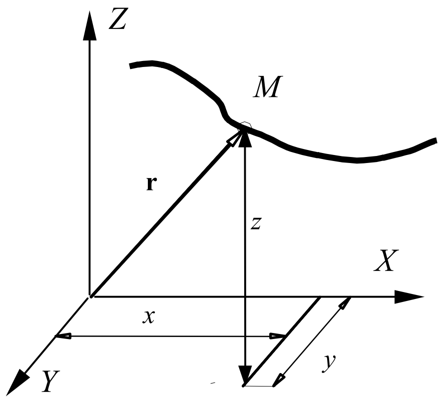


Рис. 1

$$\mathbf{r} \ = \ x \cdot \mathbf{i} \ + \ y \cdot \mathbf{j} \ + \ z \cdot \mathbf{k} \qquad (2)$$

где **i**, **j**, **k** - орты (единичные векторы) осей координат. Если в (1) принять за x, y, z текущие координаты точки M, то (2) дает закон движения точки в векторной форме.

При описании движений, происходящих на плоскости, широко используется полярная система координат (Рис. 2). В ней положение точки определяется радиусом r - длиной отрезка, соединяющего неподвижный центр O с движущейся точкой M, и углом φ между неподвижной прямой Ox (полярной осью) и отрезком OM. В этом случае уравнения плоского движения точки M будут:

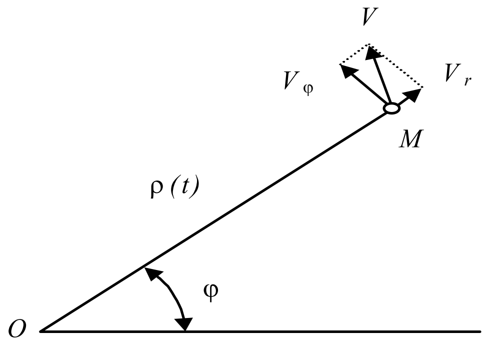


Рис.2.

$$r = \rho(t),\ \ \varphi = \varphi\,(t) \qquad (3)$$

Формулы перехода от полярных координат к декартовым имеют вид:

$$x(t) = r\cos\varphi\ ; \quad y(t) = r\sin\varphi$$

Скорость и ускорение точки. Скорость точки есть производная по времени от радиус-вектора, определяющего ее положение в пространстве. Скорость точки характеризует изменение ее положения во времени. Проекции скорости на оси декартовых координат равны

$$v_{\mathrm{x}}(t) = \frac{dx(t)}{dt}; \quad v_{\mathrm{y}}(t) = \frac{dy(t)}{dt}; \quad v_{\mathrm{z}}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

Модуль скорости дается формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение точки есть производная по времени от скорости или вторая производная по времени от радиус-вектора $\mathbf{r}$. Ускорение точки является мерой, характеризующей быстроту изменения скорости. Проекции ускорения на оси координат равны:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Модуль ускорения вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

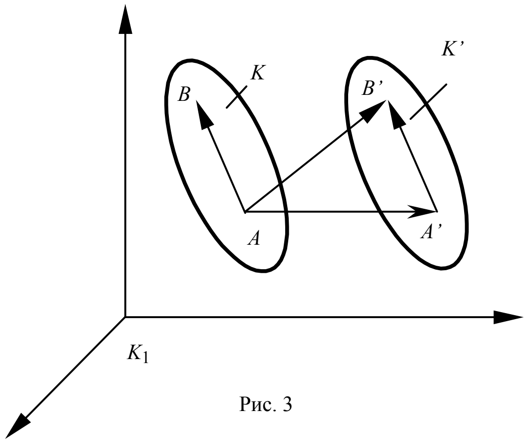


Рис. 3

Переход из одной системы координат в другую. Если мы знаем движение точки относительно системы отсчета K и движение системы K относительно основной, с точки зрения наблюдателя, системы отсчета *K1* (Рис.3), то можно определить движение точки по отношению к системе *K1*. Движение точки по отношению к подвижной системе K называют в этом случае относительным, а по отношению к неподвижной системе *K1* абсолютным. Движение самой системы K по отношению к системе *K1* называют переносным. Пусть подвижная система занимает в момент времени t положение *K*, а движущаяся точка *M* находится в этот момент в положении *A*. За промежуток времени dt точка *M* переместится по отношению к системе K в новое положение *B*, совершив относительное перемещение *AB*. Тогда:

$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \lim\limits_{dt \to 0} \dfrac{\mathbf{AB}}{dt}$. Одновременно система *K* за промежуток времени dt переместится в другое положение *K′* и точка *A* системы *K*, где в момент t находилась точка *M*, придет в положение *A′*. Тогда $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \lim\limits_{dt \to 0} \dfrac{\mathbf{AA'}}{dt}$. В результате точка *M* придет через промежуток времени dt в положение *B′*. Т. к. $\mathbf{AB'} = \mathbf{AA'} + \mathbf{A'B'}$ и $\mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$, то, деля обе части векторного равенства на dt и переходя к пределу при $dt \to 0$, получаем: $\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}}$

Этих элементарных сведений вполне достаточно, чтобы справиться с задачами, предлагаемыми ниже. Как уже упоминалось, кинематика мало чем отличается от геометрии, и главные трудности, с которыми вам придется столкнуться, чисто геометрического свойства. Поэтому в пособии не приводятся подробные описания алгоритмов, т. к. предполагается, что планиметрией вы владеете достаточно хорошо. В конце некоторых задач дается ссылка на книги, которые могут вам помочь при написании программы. Успеха!

ПРИМЕР ПРОГРАММЫ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Задача. Муравей ползет со скоростью v по спице колеса радиуса R в направлению от оси к ободу. Колесо катится без проскальзывания по ровной дороге, совершая N оборотов в минуту. Построить траекторию движения муравья в неподвижной системе координат.

Автор программы Иноземцев И.В., гр.912 (1999 г.).

```
uses crt,graph;
var
    N:real; {N-число оборотов, совершаемых колесом за секунду}
    v:real; {v - скорость муравья}
    R:real; {R - радиус колеса}
    l:real; {l - расстояние от центра колеса до муравья}
    xc , yc :real; {xc , yc - координаты центра колеса}
    s: integer; {s - число пиксел в одном метре}
    gd , gm : integer; {gd , gm - переменные для инициализации графики}
    fi:real; {fi - угол между осью y и линией, вдоль которой ползет муравей}
    dt:real; {dt - малый промежуток времени}
    dfi:real; {dfi - изменение угла за время dt}
    i: integer; {i - переменная для организации цикла}

procedure DrawBug(r,xc,yc,l,fi:real);{Процедура, рисующая муравья}
var
    xm,ym:real; {xm,ym - координаты муравья в метрах}
    x,y:integer; {x,y - координаты муравья в пикселах}
begin
xm:=xc-l*sin(fi); {Нахождение коорд. X муравья через коорд. центра колеса
и расстояние до центра}
ym:=yc-l*cos(fi);  {Нахождение коорд. Y муравья через коорд. центра колеса
и расстояние до центра}
x:=round(xm*s); {Перевод из действительных координат}
y:=round(300-ym*s); {в экранные}
putpixel(x,y,red); {Отображение текущего положения муравья в виде точки
красного цвета}
end;

begin
    N:=0.01;
    v:=0.05;
    fi:=0;
    dt:=0.001;      {Задание начальных значений}
    s:=5;
```

```
    r:=3;
    l:=3;
    fi:=0;
    xc:=r;yc:=r;
gd:=0;
initgraph(gd,gm,''); {Открытие графического режима}
line(0,300,640,300);
{Отображение поверхности земли:}
for i:=1 to 640 div 5 do line(i*5,300,i*5-5,305);
repeat  {Начало основного цикла прорисовки}
l:=l-dt*v;
if abs(l)>r then  {Если муравей слез с колеса то}
begin
{"Посадить" его на обод}
if l>0 then l:=r else l:=-r;
v:=-v;  {Поменять направление на противоположное}
end;

{Нахождение нового расстояния от муравья до центра колеса через время
dt}

dfi:=N*dt*2*Pi; {Нахождение приращения угла}
fi:=fi+dfi;     {Нахождение нового угла}
xc:=xc+dfi*r;   {Нахождение новой координаты центра}
DrawBug(r,xc,yc,l,fi); {Отображение текущего положения муравья}
until  (round(xc*s)>640);{Продолжать цикл, пока муравей не выйдет за пре-
делы экрана}
readln;              {Ждать нажатия клавиши ENTER}
closegraph;                   {Закрыть графический режим}
end.
```

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1

Уравнение движения точки задано в виде $x = 3t/(1+t)$, $y = 3t/(1+t)$, где t - время. Построить графики траектории точки и зависимости модулей ее скорости и ускорения от времени.

Задача 2

Уравнения движения точки даны в полярных координатах $r(t) = b\exp(t)$, $\varphi = t/k$, где t - время, b, k- константы. Построить графики траектории движения точки и зависимости модулей ее скорости и ускорения от времени.

Задача 3

Палочка длины L скользит под действием силы тяжести по сторонам прямого угла (Рис.4). Постройте траекторию ее точки, расположенной на расстоянии l от верхнего конца. [1]. Сравните полученную кривую с аналитическим решением $\dfrac{x^2}{l^2} + \dfrac{y^2}{(L-l)^2} = 1$

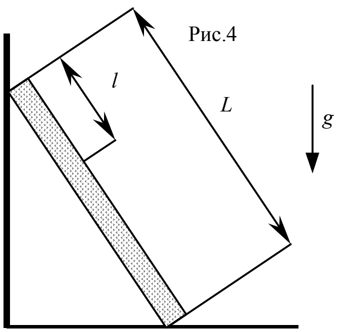


Рис.4

Задача 4

Резиновый шнур длиной 1 м одним концом прикреплен к стене, другой у вас в руке. Жучок начинает ползти по шнуру со скоростью 10 см/сек. Когда он проползает 10 см вы растягиваете шнур, отступая от стены, на 1 м, когда вторые десять - еще на один и т.д. Постройте график зависимости расстояния от жучка до стены от времени. Доползет ли жучок до вас и если доползет, то за какое время? [Приложение 1]

Задача 5

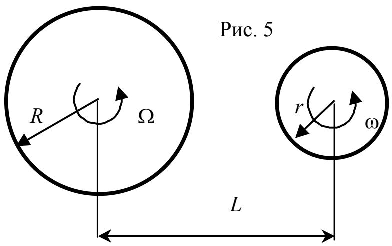
(*Четыре черепахи*)

Четыре черепахи сидят в углах квадрата с длиной стороны 1 м. В момент t=0 они начинают ползти со скоростью 10 см/сек, при этом каждая из них всегда ползет в направлении ближайшей по ходу часовой стрелки соседки. Построить траектории черепах в зависимости от времени и определить, через какое время они встретятся.

Задача 6

Два диска с радиусами R и r с центрами, расположенными на расстоянии L друг от друга, вращаются с угловыми скоростями Ω и ω (Рис. 5). Нарисовать траекторию точки обода одного из них в системе координат точки, расположенной на ободе другого.

Рис. 5

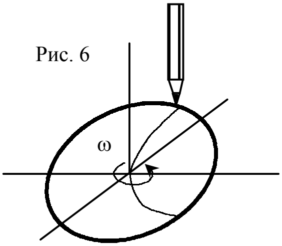


Задача 7

(*Траектория тела во вращающейся системе координат*)

Карандаш, двигающийся прямолинейно и равномерно со скоростью v в неподвижной системе координат, пересекает круглый лист бумаги радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω. [2]. Какой след оставит он на листе бумаги (Рис.6)? Как будет выглядеть след, оставленный карандашом, совершающим периодические колебания над листом?

Рис. 6



Задача 8

(*Циркуляция корабля*)

Скорость корабля $\mathbf{v}_1$ относительно воды постоянна по модулю и всегда направлена по перпендикуляру к линии визирования на неподвижную точку B (Рис.7). Какую кривую относительно неподвижного берега опишет корабль, если это движение происходит при течении воды с постоянной по модулю и направлению скоростью $\mathbf{v}_e$? Сравните полученную численно траекторию с аналитическим решением:

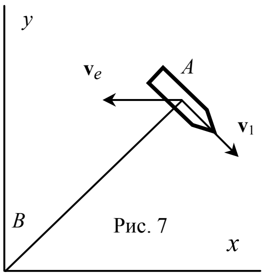


Рис. 7

$$r = r_0 \frac{1 - v_e / v_1}{1 - (v_e / v_1)\cos\varphi},$$

где φ - угол между $\mathbf{r}$ и осью y.

Задача 9

(*Упрямый пловец*)

Пловец пересекает реку ширины L со скоростью $\mathbf{v}_r$ так, что вектор его скорости постоянен по величине и непрерывно направлен на неподвижную точку на противоположном берегу реки (Рис. 8). Скорость течения реки $\mathbf{v}_e$. Построить траекторию пловца в неподвижной системе координат и в системе координат, связанной с рекой. Сравните полученную траекторию в неподвижной системе

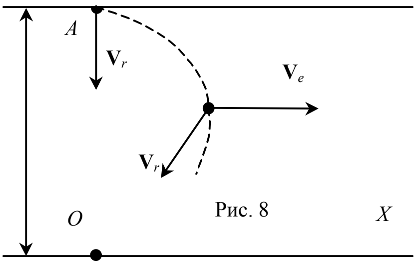


Рис. 8

координат с аналитическим решением $r = \dfrac{L}{\sin\varphi}\operatorname{tg}^k\dfrac{\varphi}{2}$, где $\mathbf{r}$ – радиус вектор, соединяющий точку на берегу и пловца, φ – угол между $\mathbf{r}$ и осью x, а $k = v_r/v_e$.

Задача 10

(*Классическая задача преследования*)

Заяц бежит прямолинейно и равномерно со скоростью v_S. Собака преследует зайца с постоянной по величине скоростью v. Вектор скорости собаки непрерывно направлен на зайца. Найти траекторию собаки, ее начальное положение определяется углом ψ_0 относительно оси x и расстоянием до зайца b_0. Сравните полученную численно траекторию с аналитическим решением:

$$b(\varnothing) = b_0 \frac{\cos\varnothing_0}{\cos\varnothing}\left(\frac{\sec\varnothing + \operatorname{tg}\varnothing}{\sec\varnothing_0 + \operatorname{tg}\varnothing_0}\right)^p, \qquad p = v/v_s,$$

начало полярной системы координат совпадает с целью и движется вместе с ней.

Задача 11

(*Лев и гладиатор*)

Радиус арены Колизея (Рим, 1 век н. э.) равен R. Арена обнесена высокой решеткой. На арене находятся безоружный, но быстроногий гладиатор и лев. Придумайте тактику спасения для гладиатора, предполагая, что он может бесконечно долго бегать со скоростью, равной скорости льва V. Лев в любой момент времени бежит в направлении гладиатора. [4], [Приложение 2].

Задача 12

(*Лоцман и корабль*)

Корабль движется по синусоидальной траектории, описываемой уравнениями:

$$X = -4L + V_x t$$

$$Y = (L/2)[5 + \sin((\pi / L \cdot (x - 4L)))]$$

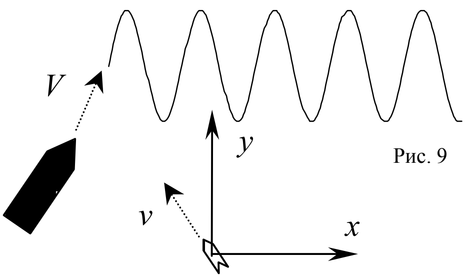


Рис. 9

где $V_x = \text{const} = 32$ км/ч, $L = 40$ км - полупериод синусоиды. В момент $t = 0$ из точки с координатами (0,0) для встречи с кораблем выходит катер (Рис. 9), двигаясь с постоянной скоростью $v = 40$ км/ч. На катере не знают траекторию движения корабля, но могут определять его положение в каждый момент времени t, поэтому все время направляют движение катера по прямой, соединяющей точки положения корабля и катера. Построить траектории движения корабля и катера. Встретится ли катер с кораблем? Если встретится, то через какое время? Если нет, то как нужно изменить скорость катера, чтобы встреча состоялась? Исследовать зависимость времени встречи от скорости катера.

Дополнительные вопросы:

а) На катере в каждый момент t определяют скорость $\mathbf{V}$ корабля по формуле

$$\mathbf{V}(t) = [\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t-\tau)]/\tau$$

и направляют движение катера в точку $\mathbf{R}(t+\tau) = [\mathbf{R}(t) + \mathbf{V}(t)\,\tau]$ прогнозируемого положения корабля в момент $t+\tau$, где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки корабля, τ - интервал времени прогнозирования. Исследовать зависимость времени встречи от величины интервала прогнозирования τ. Какое τ следует выбрать для скорейшей встречи с кораблем?

б.) На катере в каждый момент t определяют не только скорость, но и ускорение $\mathbf{A}$ корабля по формуле

$$\mathbf{A}(t) = (\mathbf{R}(t) - 2\mathbf{R}(t-\tau) + \mathbf{R}(t-2\tau)) / \tau^2$$

и направляют движение катера в точку

$$\mathbf{R}\,(t+\tau) = \mathbf{R}(\tau) + \mathbf{V}(t)\,\tau + \mathbf{A}(t)\,(\tau^2/2)$$

прогнозируемого положения корабля в момент $t+\tau$. Исследовать зависимость времени встречи от величины интервала прогнозирования τ. Какой из алгоритмов обеспечивает минимальное время сближения?

Задача 13

(*Геоцентрическая система координат*)

Период обращения Земли вокруг Солнца 365,26 дней, а период обращения Марса 686,98 дней. Постройте траекторию движения Марса в системе отсчета Земли в координатах (t, φ), где φ – угол между радиус-векторами

Земля-Марс и Земля – бесконечно удаленная звезда, а t – время. [3], [Приложение 3].

Задача 14

(*Нет, не 45 градусов!*)

Снаряд выстреливается со скоростью V под углом α к горизонту. Построить график зависимости длины траектории снаряда от угла α. При каком угле длина траектории будет максимальной?

Задача 15

(*Прямая - кратчайшее расстояние между точками?*)

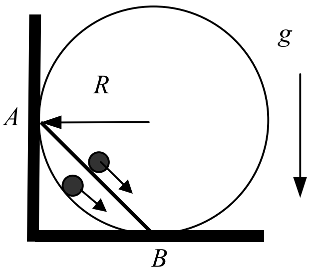


Рис.10

Тело скользит без трения по хорде, соединяющей два взаимоперпендикулярных радиуса окружности R (Рис.10). Быстрее или медленнее тело попадет из точки A в точку B, если будет двигаться по дуге окружности?

Задача 16

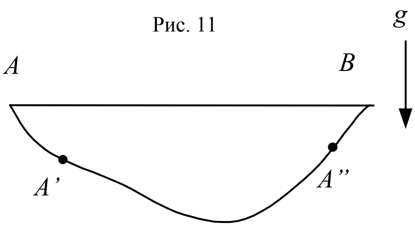
В землю вбиты два колышка на расстоянии A друг от друга. К колышкам привязана веревка длины $L > A$. Третий колышек, скользя вдоль веревки так, что она все время туго натянута, совершает полный оборот вокруг первых двух колышков. Какой след он прочертит на земле?

Задача 17

(*Брахистохрона*)

Тело массы m скользит без трения по поверхности заданной формы в однородном поле тяжести, стартовав из точки A без начальной скорости (Рис. 11). По какой поверхности A, $A'...A''$ должно двигаться тело, чтобы попасть в точку B, расположенную на той же высоте, что и A, за минимальное время? Кривая, обладающая таким свойством, называется брахистохроной (от греческого βραχιστοζ – кратчайший и χρψυοζ – время). Задача о брахистохроне была впервые поставлена и решена (разумеется, аналитически) в 1696 году Иоганном Бернулли, который тем самым положил начало вариационному исчислению - отделу математического анализа, посвященному нахождению экстремумов функционалов. Попробуйте сами придумать численный алгоритм для нахождения формы кривой, используя возможности компьютера, которого у Бернулли не было [1], [5].

Рис. 11



Задача 18

(*Кардиоида*)

Диск катится без скольжения по внешнему ободу другого диска такого же радиуса. Построить траекторию точки обода первого диска. Полученная кривая называется кардиоидой (частный случай эпициклоиды). Смысл названия легко понять, если задача решена правильно.

Задача 19

(*Эпициклоиды*)

Диск радиуса r катится без скольжения по другому диску радиуса R. Построить траекторию точки обода первого диска. Рассмотреть случаи, когда $r/R = 2$; 3/2; 3/5. Полученные кривые называются *эпициклоидами*.

Задача 20

(*Гипоциклоиды*)

Диск радиуса r катится без скольжения внутри обода другого диска радиуса R. Построить траекторию точки обода диска радиуса r. Рассмотреть случаи, когда r/R = 1/4; 2/5; 1/2; 2/3; 1/3. Полученные кривые называются гипоциклоидами. Частные случаи гипоциклоиды при r/R = 1/4 и 1/3 называются *астроида* и *кривая Штейнера*.

Задача 21

(*Эпитрохоида и гипотрохоида*)

Для задач 18-19 построить траекторию точки, лежащей на расстоянии h от центра диска радиуса r. Полученные кривые называются соответственно *эпитрохоидами* и *гипотрохоидами*. Если $h > r$, то трохоиду называют удлиненной, при $h < r$ – укороченной. Среди трохоид особенно интересны так называемые трохоидальные розы, для которых $h = h + mR$, где m – целое число.

Задача 22

(*Спираль Архимеда*)

Муравей ползет по спице колеса с постоянной скоростью v. Колесо вращается с угловой скоростью ω, при этом его ось неподвижна. Построить траекторию муравья в неподвижной системе координат. Полученная кривая называется *спиралью Архимеда*.

Задача 23

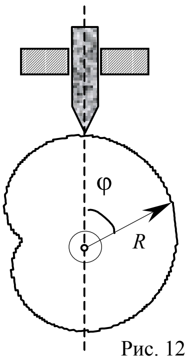


Рис. 12

Ползун двигается равномерно вращающимся эксцентриком (Рис. 12), поверхность которого описывается уравнением

а.) Улитка Паскаля: $\rho(\varphi) = 2R\cos\varphi + 3R$ и

б.) Спираль Архимеда: $\rho(\varphi) = R\varphi$ (одна половина) и $\rho(\varphi) = R(\pi - \varphi)$ (другая половина), где R – некоторая постоянная величина, а φ – угол. Центр координат совпадает с осью вращения эксцентрика. Построить зависимость смещения и скорости ползуна от времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики. М, «Наука», 1967.

2.Фейнмановские лекции по физике. т 1,2., М., «Мир», 1967.

3. Эрик Роджерс. Физика для любознательных, т.2., М., «Мир», 1969.

4. В мире науки, 1992, 6, стр.82.

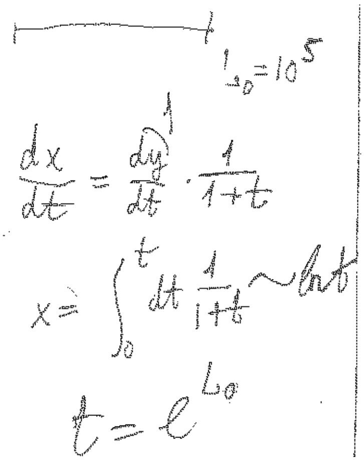
5. В.М. Тихомиров Рассказы о максимумах и минимумах. Серия «Библиотечка «Квант», выпуск 56.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Природа, 1990, №8, стр.119. Л.Б. Окунь, чл.-корр. РАН. «Три эпизода»,

Великому физику акад. А.Д. Сахарову принадлежит неофициальный рекорд скорости решения этой задачи.

…21 июля 1976 г. Ресторан «Арагви» в Тбилиси, где происходит торжественный ужин участников международной конференции по физике высоких энергий(XVIII в серии так называемых Рочестерских конференций). Много длинных столов. За одним из них я оказался вблизи от Андрея Дмитриевича. Общий разговор стохастически менял направление. В какой-то момент заговорили о задачах на сообразительность. И тут я предложил Андрею Дмитриевичу задачу о жучке на идеальной резине. Суть ее такова. Резиновый шнур длиной 1 км одним концом прикреплен к стене, другой у вас в руке. Жучок начинает ползти по шнуру от стены к вам со скоростью 1 см/сек. Когда он проползает первый сантиметр, вы удлиняете резину на 1 км, когда он проползает второй сантиметр – еще на 1 км, и так каждую секунду. Спрашивается: доползет ли жучок до вас, и если доползет, то за какое время?



$$1$$

$$\frac{1}{L_0} = 10^5$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{1+t}$$

$$x = \int_0^t dt\,\frac{1}{1+t} \sim \ln t$$

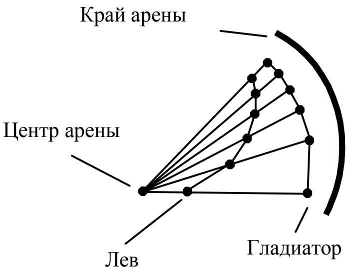
$$t = e^{L_0}$$

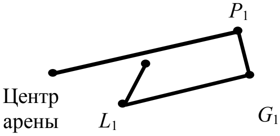
И до, и после этого вечера я давал задачу разным людям. Одним для ее решения требовалось около часа, другим сутки, третьи оставались твердо убеждены, что жучок не доползет, а вопрос для времени задается, чтобы навести на ложный след.

Андрей Дмитриевич переспросил условие задачи и попросил кусочек бумаги. Я дал ему свой пригласительный билет на банкет, и он тут же без всяких комментариев написал на обороте решение задачи. На все ушло около минуты.

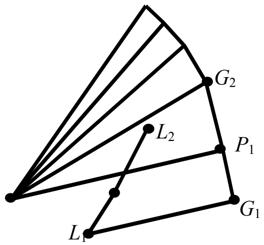
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. («В мире науки», 1992, 6, стр.82.)

СКИРАЛЬ - основа стратегии, позволяющей гладиатору удерживать льва на дистанции. Двигаясь по этой траектории, гладиатор представляет себе линию, проходящую через него и центр арены. Он бежит короткий отрезок перпендикулярно этой линии. На каждом следующем отрезке движения он продолжает представлять себе линии, проходящие через него и центр и бежит перпендикулярно этим линиям на расстояния, равные первому отрезку, умноженному на $n^{-0,75}$.

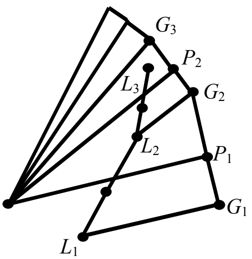




Стратегия спасения. Гладиатор всегда может убежать от льва, если он будет бежать с той же скоростью, что и лев и придерживаться следующей стратегии. Допустим, что гладиатор начинает бег из точки G_1, а лев – из точки L_1.



Первый этап. Гладиатор бежит перпендикулярно линии G_1L_1, пока не достигнет точки P_1 (пересечение его траектории с радиусом, параллельным G_1L_1).



Второй этап. Гладиатор, пройдя точку P_1, пробегает расстояние, равное первому отрезку скирали (см. рисунок на стр 22). За это время лев достигнет точки L_2.

Последующие этапы. Гладиатор бежит перпендикулярно линии G_nL_n, а затем, после точки P_n, пробегает расстояние, равное n-ому отрезку скирали. При такой стратегии гладиатор никогда не попадет в пасть хищнику.

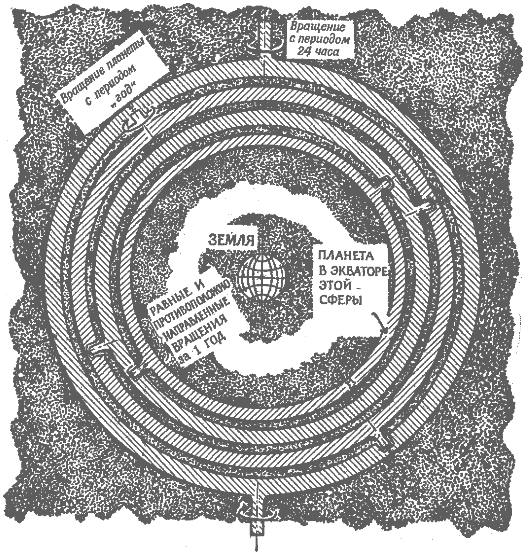
Дополнительное задание

Что произойдет, если гладиатор ошибется в вычислениях (а это не мудрено!) и будет пробегать отрезки скирали со случайной относительной ошибкой, равной нескольким процентам?

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

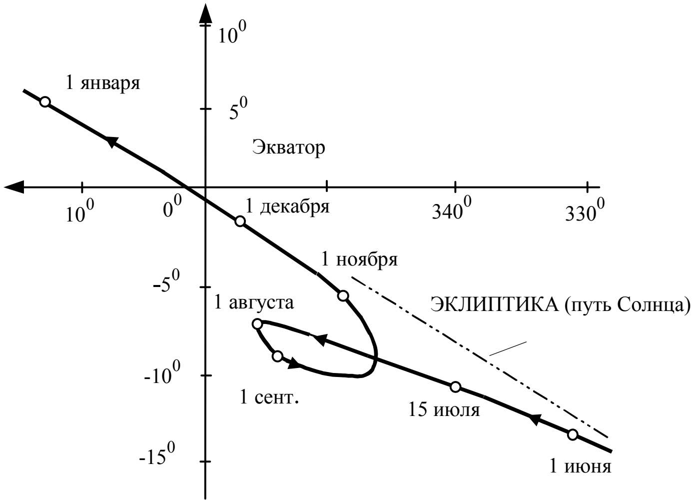
Меркурий, Марс, Венера, Юпитер, Сатурн – пять планет, известных древним астрономам эпохи ранних цивилизаций. Когда впервые были обнаружены планеты, ученых древности волновал вопрос: что заставляет их двигаться столь необычным образом (см. [3, стр. 33,35])? На рисунке показана кинематическая схема, предложенная древнегреческим астрономом Евдоксием (ок. 370 г до н.э.).

Вот как Евдоксий объясняет движение планет с помощью четырех сфер.



Часть схемы Евдоксия

Планета укреплена на внутренней сфере где-то на ее экваторе. Внешняя из четырех сфер вращается вокруг идущей с севера на юг оси, совершая полный оборот за 24 часа, что объясняет суточное движение планеты с звездами. Следующая внутренняя сфера вращается вокруг оси, закрепленной во внешней сфере и наклоненной под углом 23,50 с севера на юг, так что ее экватор является эклиптикой Солнца и планет. Эта сфера вращается в собственном «году планеты» (время, в течение которого планета обходит зодиак), так построение, что ее движение соответствует общему движению планеты относительно звездного неба. Третья и четвертая сферы совершают одинаковые и противоположно направленные вращения вокруг осей, наклоненных одна к другой под некоторым малым углом. Ось третьей сферы вращается в зодиаке второй, а четвертая несет саму планету, как бы вставленную в экватор. В результате сложения всех этих движений планета движется по петлеобразной траектории. Полную картину этого трехмерного движения трудно себе представить.



Путь Марса на звездном небе. Эклиптика- это кажущийся путь Солнца. Орбиты планет проходят близко к эклиптике, потому что плоскости этих орбит близки к плоскости земной орбиты.

С помощью всего 27 сфер Евдоксий построил систему, хорошо имитирующую наблюдаемые движения планет. Ее построение потребовало сложных математических вычислений.

Тем не менее, предсказания системы Евдоксия расходились с более точными наблюдениями. Очевидный выход из положения – увеличение числа сфер - был использован его последователями. В результате получалось «всего» 55 сфер. Системой Евдоксия пользовались в течение столетия, пока не была предложена более простая геометрическая схема.

Системы древних астрономов кажутся неестественными и даже немыслимыми, однако для ученых тех времен невероятным выглядело предположение о вращении Земли вокруг Солнца. *Ведь если Земля движется, то предметы будут сбрасываться с нее при вращении или отставать от нее при движении!* Таким образом, чисто кинематическая теория оказывается неверной и для понимания законов небесной механики требуется знание сил, приводящих планеты в движение, т.е. закона всемирного тяготения. О том, как рассчитать с его помощью орбиты планет рассказывается в части IV данного пособия.